曲面上の閉曲線の単純性についての考察

山　本　亮　介

On simplicity of loops on a surface

Ryosuke YAMAMOTO

群馬大学教育学部紀要　自然科学編
第 66 巻　13—22 頁　2018　別刷

曲面上の閉曲線の単純性についての考察

山　本　亮　介
群馬大学教育学部数学教育講座
（2017 年 9 月 27 日受理）

On simplicity of loops on a surface

Ryosuke YAMAMOTO
Depertment of Mathematics, Faculty of Education, Gunma University
Maebashi, Gunma 371-8510, Japan
（Accepted on September 27th, 2017）

1　はじめに

1.1　背景

曲面上の 1 つの閉曲線が単純であるとは，その曲線を曲面上の (free) homotopy 変形で動かして自己交差がない状態にできるとき, またその状態をいう．本稿では, 1 つ穴あき有向曲面上の閉曲線が単純であるかどうかを代数的に判定する方法について述べる.

代数的に扱うためには，以下の方針をとる．まず，前提として，1 つ穴あき有向曲面 (Σ とする) の基本群 (1 つ穴あき有向曲面の基本群は自由群である) に “よい” 生成系をとり，与えられた有向閉曲線 γ が，この生成系による語 w_γ として表示されている状況を考える．(つまり，γ に対応する基点付き閉曲線の (based) homotopy 類が先の生成系による語として表されている．) このとき，γ が単純閉曲線であることと，w_γ が基点付き単純閉曲線の (based) homotopy 類と共役であることが同値である．このことに注意しながら語 w_γ を解析することで，γ の単純性を判定したい．語 w_γ の解析方法として，河澄氏 [4] により導入された Magnus 展開を利用することを考える．Magnus 展開とは，曲面の基本群の元を曲面の 1 次元 homology 群が生成する完備テンソル代数の元へと展開する写像である．Magnus 展開には様々なものがあるが，その中でも曲面の位相と親和性のある symplectic 展開 (Massuyeau 氏 [7] により定義された) を利用する．symplectic 展開による w_γ の展開式において，次数の低いところから順に情報を取り出してゆくことで曲線の単純性のより詳細な判定方法を構築することを目指す.

1.2　設定

本稿を通して, Σ を種数 $g \geq 1$, 境界成分数 1 の有向曲面とする．b を $\partial\Sigma$ 上の 1 点とし, $\pi = \pi_1(\Sigma, b)$, $H = H_1(\Sigma; \mathbb{Q})$ と表す．$H_{\mathbb{Z}} = H_1(\Sigma; \mathbb{Z}) = \pi/[\pi, \pi]$ に対して，$H = H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}$ である．$\partial\Sigma$ に平行な閉曲

線の (based) homotopy 類を ζ と表し，$\{x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_g, y_g\}$ を π の symplectic generators で $\zeta = \prod_{i=1}^{g}[x_i, y_i]$ であるものとする．π の可換化によってこれらと対応する H の symplectic basis を $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \ldots, X_g, Y_g$ とする．このとき，

$$X_i \cdot Y_j = \delta_{ij}, \quad X_i \cdot X_j = Y_i \cdot Y_j = 0, \quad (i, j = 1, 2, \ldots, g)$$

が成立する (δ_{ij} はクロネッカーのデルタ)．さらに，$\gamma \in \pi$ が可換化によって対応する $H_{\mathbb{Z}}$ の元を $|\gamma|$ と表記する．

1.3　基本群の元の単純性

前項で述べた方針に基づき，1 つ穴あき有向曲面の基本群の元に "単純性" の概念を導入する (詳細は §3 で述べる)．すなわち，$x \in \pi$ が単純閉曲線を代表元に持つとき，x は単純であるということにする．前節で述べた通り，閉曲線 γ が単純であることと，γ の (based) homotopy 類が π において単純な元と共役であることとが同値である．

また，Magnus 展開により，π の降中心列 $\Gamma_1 = \pi, \Gamma_{k+1} = [\Gamma_1, \Gamma_k]$, $(k = 1, 2, \ldots)$ によるフィルター付けが値域の完備テンソル代数がもつ次数によるフィルター付けに対応する．そこで，π の降中心列に関する冪零群 $N_k := \Gamma_1/\Gamma_k$, $(k = 2, 3, \ldots)$ の元に単純性を定義する．すなわち，N_k の元を $[x]_k$, $(x \in \pi)$ と表すこととして，これが単純な代表元を持つとき，$[x]_k$ は単純であるということにする．

2 次の冪零群 N_2 は $H_{\mathbb{Z}}$ と同一であるので，N_2 の元は $[x]_2$ ではなく $|x|$ と表記する．$|x|$ が $H_{\mathbb{Z}}$ において primitive であることが，$|x|$ が単純であるための必要条件であることが知られている．

1.4　主結果

写像 $\ell : \pi \to H \wedge H$ は

i) $\ell(1) = 0$,

ii) $\ell(x_i) = \frac{1}{2} X_i \wedge Y_i$, $\ell(y_i) = -\frac{1}{2} X_i \wedge Y_i$,

iii) $\forall g, h \in \pi$, $\ell(gh) = \ell(g) + \ell(h) + \frac{1}{2}|g| \wedge |h|$.

で定義されるものとし，$H \wedge H$ の H に対する作用を以下で定義する．

$$\langle Z \wedge W, X \rangle = (X \cdot Z)W - (X \cdot W)Z, \quad \forall X, Z, W \in H.$$

ただし，$\xi \in H \wedge H$ が $X \in H$ へ作用した結果をカップリング $\langle \xi, X \rangle$ で表すこととする．

本稿における主結果を述べる．

定理 1.1. $x \in \pi$ とする．$\langle \ell(x), |x| \rangle \in \mathbb{Q}|x|$ であることが，$[x]_3$ が単純であるための必要条件である．

2 いくつかの用語の定義と準備

2.1 自由群の降中心列と冪零群列

階数 $2g$ の自由群 $\pi = \langle x_1, y_1, \ldots, x_g, y_g \rangle$ の降中心列

$$\Gamma_1 = \pi,\ \Gamma_2 = [\Gamma_1, \Gamma_1],\ \Gamma_3 = [\Gamma_1, \Gamma_2],\ \ldots,\ \Gamma_p = [\Gamma_1, \Gamma_{p-1}],\ \ldots$$

に対して，冪零群の列

$$N_k := \Gamma_1/\Gamma_k,\ (k = 2, 3, \ldots)$$

が定まる．$x \in \pi$ に対して，x を代表元にもつ N_k の元を $[x]_k$ と表す．つまり，$[x]_k := x\Gamma_k$ である．$N_2 = \Gamma_1/\Gamma_2 = H_{\mathbb{Z}}$ であるので，$x \in \pi$ を代表元にもつ N_2 の元は $|x|$ と表す.

N_{k+1} は, N_k をアーベル群

$$\Gamma_k/\Gamma_{k+1},\ (k = 2, 3, \ldots)$$

により中心拡大したものである．すなわち，完全系列

$$0 \to \Gamma_k/\Gamma_{k+1} \to N_{k+1} \to N_k \to 1$$

がある.

また，$\phi \in \mathrm{Aut}(\pi)$ から誘導される $\mathrm{Aut}(N_k)$ の元を $\rho_k(\phi)$ と表す．すなわち，

$$\rho_k : \mathrm{Aut}(\pi) \to \mathrm{Aut}(N_k),\ \phi \mapsto ([x]_k \mapsto [\phi(x)]_k).$$

2.2 自由群の symplectic 展開

自由群の Magnus 展開, symplectic 展開の定義を述べる．(詳細については，[4, 5, 7, 9] を参照のこと．)

$\mathbb{Q}$ 加群 $H = H_1(\Sigma, \mathbb{Q})$ から生成される完備テンソル代数

$$\widehat{T} := \prod_{m=0}^{\infty} H^{\otimes m}$$

は, $\widehat{T}_p := \prod_{m \geq p} H^{\otimes m}$ として, 階層構造 $\widehat{T} \supset \widehat{T}_1 \supset \widehat{T}_2 \supset \widehat{T}_3 \supset \cdots$ を持つ. また以下では, $\widehat{T}$ におけるテンソル積 $z \otimes w$ のテンソル記号を省略して, zw と表記する.

定義 2.1 ([4])**.** 以下を満す写像 $\theta : \pi \to 1 + \widehat{T}_1$ を Magnus 展開と呼ぶ.

i) θ は群の準同型である.

ii) $\forall \gamma \in \pi$ に対して, $\theta(\gamma) \equiv 1 + |\gamma| \mod \widehat{T}_2$.

$\theta(\gamma)$ の $H^{\otimes p}$-part を $\theta_p(\gamma)$ を表す $(p \geq 2)$.

Magnus 展開 θ は π の降中心列による階層構造を先述の $\widehat{T}$ の階層構造に移す．すなわち，以下が成立する.

命題 2.1 ([1])**.** $\theta^{-1}(1+\widehat{T}_p)=\Gamma_p,\ (p=1,2,\dots)$.

$\widehat{T}$ が持つ Hopf 代数の構造に関して, primitive な元全体の集合を $\widehat{\mathcal{L}}$ とする. また, $\mathcal{L}_p := \widehat{\mathcal{L}} \cap H^{\otimes p}$. $\widehat{\mathcal{L}}$ は Lie bracket

$$[z,w]=zw-wz,\quad \forall z,w\in\widehat{\mathcal{L}}$$

を持つ, H から生成される完備自由 Lie 代数であり, 特に $[X,Y]$ と $X\wedge Y$ $(\forall X,Y\in H)$ の同一視により,

$$\mathcal{L}_2 = H\wedge H.$$

さらに, $\exp(\widehat{\mathcal{L}})$ の元を group-like な元と呼ぶ. (詳細は [5], §2.2 参照).

定義 2.2 ([4])**.** Magnus 展開 θ が group-like であるとは, $\forall\gamma\in\pi$ について, $\theta(\gamma)$ が $\widehat{T}$ の group-like な元であるときを言う.

合成写像 $\log\circ\theta$ を ℓ^θ と表記する. Magnus 展開 θ が group-like であれば, $\forall\gamma\in\pi$ に対して,

$$\ell^\theta(\gamma)\in\widehat{\mathcal{L}}$$

が成立することは明らか. 特に, $\ell_2^\theta(\gamma)$ を $\ell^\theta(\gamma)$ の $H^{\otimes 2}$-part とすると, $\forall\gamma\in\pi$ について,

$$\ell_2^\theta(\gamma)\in\mathcal{L}_2=H\wedge H.$$

定義 2.3 ([7])**.** symplectic 展開とは，group-like な Magnus 展開 θ で,

$$\theta(\zeta)=e^\omega$$

を満すもののこと．ただし，$\omega=\sum_{i=1}^g X_iY_i-Y_iX_i \quad \in H^{\otimes 2}$.

2.3 Johnson 写像

曲面 $\Sigma=\Sigma_{g,1}$ の写像類群 $\mathcal{M}_{g,1}$ から $\mathrm{Aut}(\pi)$ への自然な準同型は単射であり，その像を $\mathrm{Aut}_\partial(\pi)$ と表すと,

$$\mathrm{Aut}_\partial(\pi)=\{\,\phi\in\mathrm{Aut}(\pi)\ |\ \phi(\zeta)=\zeta\,\}.$$

である (Dehn-Nielsen-Baer の定理).

$\mathrm{Ker}(\rho_2:\mathrm{Aut}(\pi)\to\mathrm{GL}(H))$ と $\mathcal{M}_{g,1}=\mathrm{Aut}_\partial(\pi)$ の共通部分は Torelli 群 $\mathcal{I}_{g,1}$ と呼ばれる．D. Johnson [3] は Torelli 群の構造を以下のように調べた.

$\phi\in\mathcal{I}_{g,1}$ であるとき，$\forall x\in\pi$ について,

$$|x^{-1}\phi(x)|=-|x|+\rho_2(\phi)(|x|)=0.$$

つまり，$x^{-1}\phi(x)\in[\pi,\pi]=\Gamma_2$. これより，写像 $\tau_1(\phi)$

$$\tau_1(\phi):\pi\to\Gamma_2/\Gamma_3,\ x\mapsto[x^{-1}\phi(x)]_3$$

が定まり，$\tau_1(\phi) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_{\mathbb{Z}}, \Gamma_2/\Gamma_3)$ とみなせて，準同型

$$\tau_1 : \mathcal{I}_{g,1} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_{\mathbb{Z}}, \Gamma_2/\Gamma_3)$$

が得られる．これを Johnson 準同型と呼ぶ．$\forall x, y \in \pi$ について, $[x,y] \in \Gamma_2$ を $|x| \wedge |y| \in \wedge^2 H_{\mathbb{Z}}$ に対応させることで，Γ_2/Γ_3 は $\wedge^2 H_{\mathbb{Z}}$ と同一視することができ, さらに，$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_{\mathbb{Z}}, \wedge^2 H_{\mathbb{Z}})$ は $H_{\mathbb{Z}} \otimes \wedge^2 H_{\mathbb{Z}}$ と以下で同一視する．すなわち，$A \otimes u \in H_{\mathbb{Z}} \otimes \wedge^2 H_{\mathbb{Z}}$ と $X \in H_{\mathbb{Z}}$ のカップリングを

$$\langle A \otimes u, X \rangle = (X \cdot A) u$$

と定める．

定理 2.2 ([3])**.** $\tau_1(\mathcal{I}_{g,1}) = \wedge^3 H_{\mathbb{Z}}$.

ここで，$A \wedge u \in H_{\mathbb{Z}} \wedge (\wedge^2 H_{\mathbb{Z}}) = \wedge^3 H_{\mathbb{Z}}$ と $X \in H_{\mathbb{Z}}$ のカップリングを

$$\langle A \wedge u, X \rangle = (X \cdot A) u - A \wedge \langle u, X \rangle \in \wedge^2 H_{\mathbb{Z}}$$

と定めることで，$\wedge^3 H_{\mathbb{Z}} \subset H_{\mathbb{Z}} \otimes \wedge^2 H_{\mathbb{Z}}$ とみなしている．

Johnson 準同型は，以下のように拡張される ([8, 4])．

$$A(k) := \mathrm{Ker}(\rho_{k+1} : \mathrm{Aut}(\pi) \to \mathrm{Aut}(N_{k+1})),\ (k \geq 1).$$

とする．($\mathcal{I}_{g,1} = \mathrm{Aut}_{\partial}(\pi) \cap A(1)$ である．) $\phi \in A(k)$ であるとき，$\forall x \in \pi$ について，$x^{-1}\phi(x) \in \Gamma_{k+1}$ であるので，上述とほぼ同様にして写像 $\tau_k : A(k) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_{\mathbb{Z}}, \Gamma_{k+1}/\Gamma_{k+2})$ がが定義される．これを k 次 Johnson 準同型と呼ぶ．さらに, Magnus 展開 θ を利用して，τ_k は $\mathrm{Aut}(\pi)$ 全体を定義域とする写像 τ_k^{θ} に以下のように拡張される．

$\mathrm{Aut}(\widehat{T})$ を $\widehat{T}$ の代数としての自己同型写像で, $\widehat{T}$ の階層構造を保存するもの全体がなす群とする．Magnus 展開 θ をひとつとると，$\forall \phi \in \mathrm{Aut}(\pi)$ に対して，

$$T^{\theta}(\phi) \circ \theta = \theta \circ \phi$$

を満たす $T^{\theta}(\phi) \in \mathrm{Aut}(\widehat{T})$ がただ一つ定まる ([4, 5])．$T^{\theta}(\phi)$ を ϕ の θ に関する total Johnson 写像と呼ぶ．また，ϕ の H への自然な作用から定まる H の自己同型写像を $|\phi|$ と表すこととして，

$$\tau^{\theta}(\phi) := T^{\theta}(\phi) \circ |\phi|^{-1}$$

と定めると，(この写像は $\widehat{T}_1/\widehat{T}_2 = H$ 上では恒等写像であり，) $\widehat{T}$ の階層構造に対して

$$\tau^{\theta}(\phi)|_H = \mathrm{id}_H + \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k^{\theta}(\phi)$$

と一意に分解される．ここで，$\tau_k^{\theta}(\phi) \in \mathrm{Hom}(H, H^{\otimes k+1})$ であり，これを ϕ の θ に関する k-th Johnson 写像と呼ぶ．

定理 2.3 ([4])**.** 任意の *Magnus* 展開 θ について，$\tau_k = \tau_k^{\theta}|_{A(k)}$, $(k \geq 1)$

以下は, 先述の Johnson による Torelli 群に対する結果の拡張である．

定理 2.4 ([8])**.** $\tau_1^{\theta}(\mathcal{M}_{g,1}) \subset \frac{1}{2} \wedge^3 H_{\mathbb{Z}}$

c を Σ 上の単純閉曲線で，t_c を c に沿った右手系 Dehn twist とするとき，以下が示されている．

定理 2.5 ([8, 5])**.** $\tau_1^{\theta}(t_c) = -|c| \wedge \ell_2^{\theta}(c)$.

2.4 $\mathrm{Aut}(N_3)$ の構造について

θ を group-like な Magnus 展開 とする.

$$\theta(g) \equiv 1 + |g| + \frac{|g|^2}{2} + \ell_2^\theta(g), \quad \mathrm{mod}\, \widehat{T}_3$$

と表すと，$\ell_2^\theta(g) \in \mathcal{L}_2 = H \wedge H$ である．この展開により，群の (単射) 準同型

$$N_3 \to \mathcal{L}_2 \rtimes H : [g]_3 \mapsto (\ell_2^\theta(g), |g|)$$

が得られる．ただし，半直積群 $\mathcal{L}_2 \rtimes H$ の積は以下のもの.

$$(\xi, X)(\nu, Y) = (\xi + \nu + \frac{1}{2} X \wedge Y, X + Y).$$

さらには，群の (単射) 準同型

$$\mathrm{Aut}(N_3) \to \mathrm{Hom}(H, \mathcal{L}_2) \rtimes \mathrm{GL}(H) : f \mapsto (\tau_1^\theta(f), |f|),$$

が定まる．ただし，半直積群 $\mathrm{Hom}(H, \mathcal{L}_2) \rtimes \mathrm{GL}(H)$ の積は以下のもの.

$$(f, A)(g, B) = (f \circ Ag, AB).$$

また，$\mathrm{Hom}(H, \mathcal{L}_2) \rtimes \mathrm{GL}(H)$ は以下により $\mathrm{Aut}(\mathcal{L}_2 \rtimes H)$ と同一視される．すなわち，

$$\forall (\xi, X) \in \mathcal{L}_2 \times H, \quad (f, A)(\xi, X) = (f(AX) + A^{\otimes 2}\xi, AX).$$

$f \in \mathcal{M}_{g,1} = \mathrm{Aut}_\partial(\pi)$ に対して，$\rho_2(f) \in \mathrm{Sp}(H) \subset \mathrm{GL}(H) = \mathrm{Aut}(H)$ であることは古典的に知られる事実である．また，$\rho_3(f) \in \mathrm{Aut}(N_3)$ を上記の対応によって，$\mathrm{Hom}(H, \mathcal{L}_2) \rtimes \mathrm{GL}(H)$ の元に移すとき，定理 2.4 より $\rho_3(f) \in \frac{1}{2} \wedge^3 H_{\mathbb{Z}} \rtimes \mathrm{Sp}(H)$ である.

命題 2.6. $\forall (f, A) \in \frac{1}{2} \wedge^3 H_{\mathbb{Z}} \rtimes \mathrm{Sp}(H)$, $\forall (\xi, X) \in \mathcal{L}_2 \rtimes H$ に対して，

$$\langle (f, A)(\xi, X) \rangle = A \langle \xi, X \rangle .$$

証明). $\mathrm{Hom}(H, \mathcal{L}_2) \rtimes \mathrm{GL}(H)$ と $\mathrm{Aut}(\mathcal{L}_2 \rtimes H)$ の同一視により，

$$\begin{aligned} \langle (f, A)(\xi, X) \rangle &= \langle f(AX) + A^{\otimes 2}\xi, AX \rangle \\ &= \langle f(AX), AX \rangle + \langle A^{\otimes 2}\xi, AX \rangle . \end{aligned}$$

ここで ($\mathrm{Hom}(H, \mathcal{L}_2)$ と $H \otimes \mathcal{L}_2$ を同一視して)，$f \in \frac{1}{2} \wedge^3 H_{\mathbb{Z}} \subset \wedge^3 H \subset H \otimes \mathcal{L}_2$ であるとき，$f(AX) = \langle f, AX \rangle$ であり，次の主張より，$\langle \langle f, AX \rangle, AX \rangle = 0$ が成立する.

主張 1. $\forall \xi \in \wedge^3 H$, $\forall X \in H$, $\langle \langle \xi, X \rangle, X \rangle = 0$.

証明). カップリングの線形性より，$\xi = A \wedge u$, ($A \in H, u \in \mathcal{L}_2$) の場合に示せば十分.

$$\langle \xi, X \rangle = \langle A \wedge u, X \rangle = (X \cdot A)u - A \wedge \langle u, X \rangle$$

より，

$$\langle \langle \xi, X \rangle, X \rangle = \langle (X \cdot A)u, X \rangle - \langle A \wedge \langle u, X \rangle, X \rangle = A \wedge \langle \langle u, X \rangle, X \rangle$$

となり，$\forall u \in \wedge^2 H$ について $\langle \langle u, X \rangle, X \rangle = 0$ であることが単純計算で得られる. □

あとは，以下の主張により命題が示される．

主張 2. $\forall A \in \mathrm{Sp}(H)$, $\forall(\xi, X) \in \mathcal{L}_2 \times H$, $\langle A^{\otimes 2}\xi, AX\rangle = A\langle \xi, X\rangle$.

証明). カップリングの線形性より，$\xi = Z \wedge W$, $(Z, W \in H)$ の場合に示せば十分．$A \in Sp(H)$ は H の交差形式 $\cdot$ を保存することに注意して，

$$\begin{aligned}\langle A^{\otimes 2}\xi, AX\rangle &= \langle AZ \wedge AW, AX\rangle \\ &= (AX{\cdot}AZ)AW - (AX{\cdot}AW)AZ \\ &= (X{\cdot}Z)AW - (X{\cdot}W)AZ \;=\; A\langle \xi, X\rangle .\end{aligned}$$

□

□

命題 2.7. θ を *group-like* な *Magnus* 展開とする．$\forall\phi \in \mathrm{Aut}(\pi)$ について，

$$(\ell_2^\theta(\phi(x)), |\phi(x)|) = (\tau_1(\phi), |\phi|)(\ell_2^\theta(x), |x|) \in \mathcal{L}_2 \rtimes H.$$

証明). $\forall x \in \pi$ について，

$$\begin{aligned}\theta \circ \phi(x) &= \tau^\theta(\phi) \circ |\phi| \circ \theta(x) \\ &\equiv \tau^\theta(\phi) \circ |\phi|(1 + |x| + \frac{|x|^2}{2} + \ell_2^\theta(x)), \quad \mathrm{mod}\, \widehat{T}_2 \\ &\equiv \tau^\theta(\phi)(1 + |\phi(x)| + \frac{|\phi(x)|^2}{2} + |\phi|^{\otimes 2}\ell_2^\theta(x)), \quad \mathrm{mod}\, \widehat{T}_2 \\ &\equiv 1 + |\phi(x)| + \tau_1^\theta(\phi)(|\phi(x)|) + \frac{|\phi(x)|^2}{2} + |\phi|^{\otimes 2}\ell_2^\theta(x)), \quad \mathrm{mod}\, \widehat{T}_2\end{aligned}$$

より，

$$\ell_2^\theta(\phi(x)) = \tau_1^\theta(\phi)(|\phi(x)|) + |\phi|^{\otimes 2}\ell_2^\theta(x)$$

を得る．これを使って，

$$(\tau_1(\phi), |\phi|)(\ell_2^\theta(x), |x|) = (\tau_1(\phi)(|\phi(x)|) + |\phi|^{\otimes 2}\ell_2^\theta(x), |\phi(x)|) = (\ell_2^\theta(\phi(x)), |\phi(x)|).$$

□

3 基本群および冪零商における単純性

3.1 π において

ここで，基本群 $\pi = \pi_1(\Sigma, b)$ の元の単純性の概念を定義し，閉曲線自体の単純性の概念との比較を行う．さらに，π の元が単純であるための条件をいくつか述べる．

定義 3.1. $x \in \pi$ が単純であるとは，x が基点付き単純閉曲線を代表元にもつときを言う．

null-homotopic な閉曲線は単純閉曲線であるので，単位元 $1 \in \pi$ も単純な元である．

γ を Σ 上の閉曲線とする．基点 b から γ 上の 1 点 p への有向曲線 α をとり，$\gamma_\alpha = \alpha\gamma\alpha^{-1}$ とする．つまり，γ_α は b から α をたどって p まで行き，p から γ を向きに沿って一周し，α を逆にたどって b に戻るという b を基点とする閉曲線．さらに，$w(\gamma_\alpha)$ を γ_α の (based) homotopy 類を表す $\pi = \langle x_1, y_1, \ldots, x_g, y_g \rangle$ の語とする．

$w(\gamma_\alpha)$ が単純であれば，γ が単純閉曲線であることは明らかであるが，逆は一般には成立しない．実際，γ_α として，x_2x_1 の基点付き曲線を採用すると，γ_α は free homotopy では単純閉曲線になるが，based homotopy では自己交差を無くすことができない．

命題 3.1. γ が単純閉曲線であることと，$w(\gamma_\alpha)$ が単純な元と共役であることとが同値である．

証明). 閉曲線 γ について，α を基点 b から γ 上の 1 点 p への有向曲線とし，β を基点 b から γ 上の別の 1 点 q への有向曲線とする．このとき，b に基点を持つ閉曲線 δ を b から出て β を進み，点 p から q へ γ を向きに沿って進み，α を逆に進んで b に戻るというものとすると，

$$w(\gamma_\beta) = \delta\gamma_\alpha\delta^{-1}$$

となる．つまり，$w(\gamma_\alpha)$ と $w(\gamma_\beta)$ は π において共役である．

γ と b を結ぶ曲線 α_0 として，単純曲線であり，端点以外では γ と共有点を持たないものをとることができる．このとき，γ が単純閉曲線であることと，γ_{α_0} が (b に基点をもつ) 単純閉曲線であることが同値であることは明らか． □

群 G の元 g が primitive であるとは，G のどんな元 h でも $g = h^k$, $(|k| > 1)$ とはならないときを言う．primitive であるという性質は，共役をとっても変化しない．

命題 3.2. $x \in \pi$ で，$|x| \neq 0$ とする．

i) x が単純であるための必要十分条件は，$\phi \in \mathrm{Aut}_\partial(\pi)$ で $\phi(x_1) = x$ であるものが存在すること．

ii) x が *primitive* であることは，$x \in \pi$ が単純であるための必要条件である．

証明). i) $x \in \pi$ が単純であるとする．このとき，x と共役な元で，その代表元として (基点つき) 単純閉曲線をもつものが存在する．また，π の内部自己同型によって x は共役な元へ移る．よって，x が元々代表元として (基点つき) 単純閉曲線 (γ とする) をもつとしてよい．$|x| \neq 0$ より，γ は非分離的である．よって，Σ の自己同相写像 f で $f(\mu_1) = \gamma$ を満たすものが存在する．ただし，μ は x_1 の代表元である単純閉曲線．f から誘導される π の自己同型写像を ϕ とすれば，$\phi(x_1) = x$ である．

逆に $\phi \in \mathrm{Aut}_\partial(\pi)$ で $\phi(x_1) = x$ であるものが存在するとき，Dehn-Nielsen-Baer の定理より，Σ の自己同相写像 f で ϕ を誘導するものが存在する．つまり，(非分離的) 単純閉曲線 $f(\mu_1)$ に対応する (based) homotopy 類が x である．よって，x は単純．

ii) $x \in \pi$ が単純であるとする．i) より $\phi \in \mathrm{Aut}_\partial(\pi)$ で $\phi(x_1) = \gamma$ となるものがある．x_1 は π の生成元なので primitive. よって，その同型写像による像 γ も primitive.

□

3.2 $N_2 = H$ において

$H_{\mathbb{Z}} = \pi/[\pi,\pi]$ において，$X \in H_{\mathbb{Z}}$, $(X \neq 0)$ が primitive であるとは，どんな $Y \in H_{\mathbb{Z}}$ でも $X = kY$, $(|k| > 1)$ とはならないときをいう．

以下は，よく知られた事実である (例えば，[2, Part 1. §6.2] を見よ．)．

命題 3.3. *$x \in \pi$ で，$|x| \neq 0$ とする．$|x|$ が primitive であることは，$|x|$ が単純であるための必要十分条件である．*

3.3 N_3 において

定理 3.4 (定理 1.1 再掲)**.** *$x \in \pi$ とする．$\langle \ell(x), |x| \rangle \in \mathbb{Q}|x|$ であることは，$[x]_3$ が単純であるための必要条件である．*

この定理の証明のために，以下の命題を準備する．写像 ℓ がもつ性質については，[10, §2.1] を参照のこと．

命題 3.5. *$x \in \pi$. $\langle \ell(x), |x| \rangle \in \mathbb{Q}|x|$ なら，任意の $\phi \in \mathrm{Aut}_\partial(\pi)$ に対して，$\langle\, \ell(\phi(x)), |\phi(x)|\, \rangle \in \mathbb{Q}|\phi(x)|$.*

証明). symplectic 展開 θ は，

$$\theta(g) \equiv 1 + |g| + \frac{|g|^2}{2} + \ell(g), \quad \mathrm{mod}\, \widehat{T}_3$$

を満たすとする．このような symplectic 展開は確かに存在する ([10] を参照せよ)．

命題 2.6, 2.7 より，

$$\langle\, \ell(\phi(x)), |\phi(x)|\, \rangle = \langle (\tau_1(\phi), |\phi|)(\ell(x), |x|) \rangle = |\phi| \, \langle \ell(x), |x| \rangle\,.$$

よって，$\langle \ell(x), |x| \rangle = q|x|$, $(\exists q \in \mathbb{Q})$ なら，

$$\langle\, \ell(\phi(x)), |\phi(x)|\, \rangle = |\phi|(q|x|) = q|\phi(x)|.$$

つまり，$\langle\, \ell(\phi(x)), |\phi(x)|\, \rangle \in \mathbb{Q}|\phi(x)|$. □

定理 1.1 の証明). $[x]_3$ が単純であるとする．すなわち，単純閉曲線の (based) homotopy 類 $y \in \pi$ と $\delta \in \Gamma_3$ があって，$y = x\delta$.

命題 3.2 i) より $\phi(x_1) = y$ であるような $\phi \in \mathrm{Aut}(\pi)$ が存在する．命題 3.5 より，

$$\langle \ell(x_1), X_1 \rangle \in \mathbb{Q}X_1 \quad \Rightarrow \quad \langle \ell(\phi(x_1)), |\phi(x_1)| \rangle \in \mathbb{Q}|\phi(x_1)|$$

であり，$\ell(\phi(x_1)) = \ell(y) = \ell(x\delta) = \ell(x)$ と $|\phi(x_1)| = |y| = |x\delta| = |x|$ より，

$$\langle \ell(x), |x| \rangle \in \mathbb{Q}|x|$$

を得る． □

参考文献

[1] N. Bourbaki, Groupes et algébres de Lie, chapitre 2, Hermann, Paris (1972)

[2] B. Farb and D. Margalit, A primer on mapping class groups (PMS-49), Princeton University Press (2011).

[3] D. Johnson, An abelian quotient of the mapping class group $\mathcal{I}_g$, Math. Ann. 249, 225-242 (1980)

[4] N. Kawazumi, Cohomological aspects of Magnus expansions, arXiv: 0505497[mathGT] (2006)

[5] N. Kawazumi and Y. Kuno, The logarithms of Dehn twists, Quantum topology 5, 347-423 (2014)

[6] Y. Kuno, A combinatorial construction of symplectic expansions, Proc. Amer. Math. Soc. 140 no.3, 1075-1083 (2012)

[7] G. Massuyeau, Infinitesimal Morita homomorphisms and the tree-level of the LMO invariant, Bull. Soc. Math. France 140 no.1, 101-161 (2012)

[8] S. Morita, The extension of Johnson's homomorphism from the Torelli group to the mapping class group, Invent. Math. 111, 197-224 (1993)

[9] 山本 亮介, 曲面上の閉曲線の幾何的交差数と自由群の Magnus 展開, 群馬大学教育学部紀要 自然科学編, 第 63 巻, 15-25 (2015)

[10] R. Yamamoto, The geometric intersection number of simple closed curves on a surface and symplectic expansions of free groups, Topology and its Applications 224, 48-59 (2017)